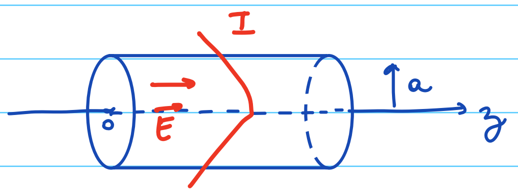
TD EM4

SF 1

cf cours

SF2



$\star$ $\mathcal{P} = \iiint \vec{j}\cdot\vec{E}\, d\tau = \iiint \frac{1}{\gamma} j^2\, d\tau = \frac{j^2}{\gamma} \underbrace{\pi a^2}_{S} l$

Par ailleurs, $I = Sj$ et $R = \frac{l}{\gamma S}$

On a donc bien $\mathcal{P} = \frac{I^2}{S^2 \gamma} S l = I^2 \times \frac{l}{\gamma S} = R I^2$:)

$\star$ En régime stationnaire $\frac{dW_{em}}{dt} = 0$

et $\mathcal{P}_{ray} = \oint \vec{\pi}\cdot d\vec{S} = \oint \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} d\vec{S}$

On a $\vec{E} = \frac{\vec{j}}{\gamma} = \frac{j}{\gamma}\vec{u_z} = \frac{I}{\gamma S}\vec{u_z}$

$\vec{B} = \mu_0 \frac{r}{2\pi a^2} I \vec{u_\theta}$ pour $r < a$ (cf EM2)

$\vec{\pi} = -\frac{I}{\gamma S} \times \frac{r}{2\pi a^2} I \vec{u_r}$

$\mathcal{P}_{ray} = -\frac{I^2}{2\gamma S^2} \oint r \vec{u_r}\cdot d\vec{S} = -\frac{I^2}{2\gamma S^2} \iint_{lat.} a\, dS = -\frac{I^2}{2\gamma S^2} a \times 2\pi a l = -I^2 \frac{l}{\gamma S}$

$= -RI^2$.

On a bien $\mathcal{P} + \mathcal{P}_{ray} = 0$:).

Exercice 2 - Résistance en géométrie sphérique

1) $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$ or V ne dépend que de r (V_1 et V_2 uniformes)

Donc $\vec{E}$ sera porté par $\vec{u_r}$ et ne dépend que de r.

2) Dans le conducteur $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ donc $\vec{j}$ porté par $\vec{u_r}$ et ne dépend que de r.

3) On a I indépendant de r par conservation du flux de $\vec{j}$ en régime stationnaire

et $$I = \iint_{\substack{\text{sphère} \\ \text{de rayon } r}} \vec{j}(r) \cdot d\vec{S} \underset{\vec{j} = j(r)\vec{u_r}}{=} \iint j(r)\, dS = j(r)\, 4\pi r^2$$

Ainsi $$\boxed{\vec{j} = \frac{I}{4\pi r^2} \vec{u_r}}$$

4) $\vec{j} = \gamma \vec{E}$ donc $$\boxed{\vec{E} = \frac{I}{4\pi\gamma r^2} \vec{u_r}}$$

5) On a $\text{div}\, \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$ par Maxwell-Gauss.

ici $$\text{div}\vec{E} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 E)}{\partial r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{I}{4\pi\gamma}\right) = 0$$

Donc $\rho = 0$. logique car le conducteur est localement neutre

6) $$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_{R_1}^{R_2} \frac{I}{4\pi\gamma r^2} dr = \frac{I}{4\pi\gamma} \left[-\frac{1}{r}\right]_{R_1}^{R_2}$$

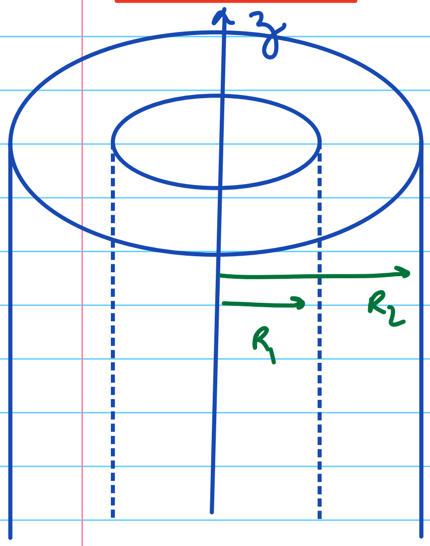
$$= \frac{I}{4\pi\gamma}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{I}{4\pi\gamma} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

Donc $$\boxed{R = \frac{1}{4\pi\gamma} \frac{R_2 - R_1}{R_2 R_1}}$$ (>0 ☺)

7) On a alors $R_2 = R_1 + e \simeq R_1$ et $R = \dfrac{e}{4\pi\gamma R_1^2} = \dfrac{e}{\gamma S}$! ok !

$S = 4\pi R^2$

Exercice 3 - Décharge d'un cylindre dans un autre



1) Si on suppose les cylindres infinis, les plans $(M, \vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ et $(M, \vec{u_r}, \vec{u_z})$ sont plans de symétrie de la distribution de charge, ils sont donc des plans de symétrie pour $\vec{E}$.
Ainsi $\vec{E}$ est porté par $\vec{u_r}$

Par ailleurs, la distribution de charge est invariante par rotation autour de (Oz) et par translation le long de (Oz).
Donc $\vec{E}(M,t) = E(r,t)\,\vec{u_r}$

2) On a par Maxwell-Faraday $\vec{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

or $\vec{rot}\,\vec{E} = \vec{0}$ car $\vec{E}(M,t) = E(r,t)\,\vec{u_r}$

On a donc $\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$ ie $\forall t$, $\vec{B}(M,t) = \vec{B_0}(M)$

or, pour $t<0$, il n'y a pas de mouvement de charge, donc $\vec{B_0} = \vec{0}$.

Ainsi, $\forall M, \forall t$, $\vec{B}(M,t) = \vec{0}$.

3) Appliquons le théorème de Gauss à un cylindre de hauteur h, d'axe (Oz) et de rayon r_Σ :

$$\oint_\Sigma \vec{E}.d\vec{S} = \pi r_\Sigma h\, E(r_\Sigma, t)$$

et $Q_\Sigma = \begin{cases} 0 & \text{si } r_\Sigma < R_1 \\ Q(t)\dfrac{h}{\ell} & \text{si } r_\Sigma > R_1 \end{cases}$ car le fluide conducteur reste électriquement neutre

en notant ℓ la hauteur des cylindres (cf Ex 2 TD EM 1)

On a donc $E(r_\Sigma, t) = \dfrac{Q(t)}{\pi \varepsilon_0 r_\Sigma \ell}$ ie $\boxed{\vec{E}(r,t) = \dfrac{Q(t)}{\pi \varepsilon_0 r \ell}\,\vec{u_r}}$

4) On a $\vec{\text{rot}}\,\vec{B} = \mu_0 \vec{j} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \overset{\text{dans le fluide}}{=} \mu_0 \gamma \vec{E} + \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$

$$\vec{0} = \mu_0 \gamma \frac{Q(t)}{\pi \varepsilon_0 r \ell} \vec{u_r} + \mu_0 \varepsilon_0 \times \frac{1}{\pi \varepsilon_0 r \ell} \frac{dQ}{dt} \vec{u_r}$$

Ici, on ne dérive PAS $\vec{u_r}$ par rapport au temps, car le point où on établit l'équation locale ne bouge pas avec t : M est fixé, donc $\vec{u_r}$ l'est aussi.

/$\vec{u_r}$: $\frac{\gamma}{\cancel{\pi \varepsilon_0 r \ell}} Q(t) + \frac{\varepsilon_0}{\cancel{\pi \varepsilon_0 r \ell}} \frac{dQ}{dt} = 0$

$$\boxed{\frac{dQ}{dt} + \frac{\gamma}{\varepsilon_0} Q(t) = 0}$$

Posons $\frac{\varepsilon_0}{\gamma} = \tau$, on a un temps caractéristique de décharge $\frac{\varepsilon_0}{\gamma}$

On voit que $\tau \nearrow$ si $\gamma \searrow$ ce qui est logique !
Moins le fluide est conducteur, plus la décharge sera longue

5) Si R_2 était chargé, il ne se serait rien passé car le champ créé dans le fluide conducteur et celui créé à l'extérieur des cylindres auraient été nuls : il n'y aurait donc pas eu de mise en mouvement de porteurs de charge, donc pas de décharge possible.

Exercice 4 - Charge d'une sphère

1) Procédons à un bilan de charge sur la sphère :

$$Q(t+dt) = Q(t) + I dt$$

ie $\quad \dfrac{dQ}{dt} = I$

or $\quad Q(t) = \oiint \sigma \, dS = 4\pi a^2 \sigma$

On a donc $\quad \boxed{4\pi a^2 \dfrac{d\sigma}{dt} = I}$

On en déduit $\quad \sigma(t) = \dfrac{I}{4\pi a^2} t + cste \quad$ or $\sigma(0) = 0$
Donc cste $= 0$

$$\boxed{\sigma(t) = \frac{I}{4\pi a^2} t}$$

2) On peut négliger le fil dans l'étude des symétries et invariances :

Par le raisonnement habituel $\vec{E}(r) = E(r)\,\vec{u}_r$.

On choisit comme surface de Gauss la sphère de rayon r et de centre O.
(centre de la boule chargée) :

$$\oiint \vec{E}.\vec{dS} = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{4\pi a^2 \sigma}{\varepsilon_0}$$

ie $\quad \boxed{E(r) = \dfrac{a^2\sigma}{\varepsilon_0 r^2}} \quad$ et $\quad \vec{E} = \dfrac{a^2\sigma}{\varepsilon_0 r^2} \vec{u_r}$.

On a par ailleurs (en électrostatique, ok d'après l'énoncé) :

$$\vec{E} = -\vec{\text{grad}}\, V \quad \text{ie ici} \quad \frac{dV}{dr} = -\frac{a^2\sigma}{\varepsilon_0} \frac{1}{r^2}$$

D'où $\quad V(r) = \dfrac{a^2\sigma}{\varepsilon_0 r} + cste \quad$ et on veut $V(r) \xrightarrow[r\to\infty]{} 0 \quad$ ie cste $= 0$

Donc $\quad V(r) = \dfrac{a^2\sigma}{\varepsilon_0 r} \quad$ donc $\quad V_S = \dfrac{a\sigma}{\varepsilon_0}$

3) On avait $\dfrac{dQ}{dt} = 4\pi a^2 \dfrac{d\sigma}{dt} = I$

or $U = V_0 - V_S = RI = \dfrac{\ell}{\gamma S} I$

Donc $4\pi a^2 \dfrac{d\sigma}{dt} = \dfrac{\gamma S}{\ell}(V_0 - V_S) = \dfrac{\gamma S}{\ell}\left(V_0 - \dfrac{a\,\sigma}{\varepsilon_0}\right)$

$$\frac{d\sigma}{dt} + \frac{\gamma S}{4\pi \varepsilon_0 a \ell}\sigma = \frac{\gamma S}{4\pi a^2 \ell} V_0$$

On a donc $\sigma(t) = A e^{-t/\tau} + \dfrac{\varepsilon_0}{a} V_0$ avec $\tau = \dfrac{4\pi \varepsilon_0 a \ell}{\gamma S}$

or $\sigma(0) = 0$ donc $A = -\dfrac{\varepsilon_0}{a} V_0$

et $\boxed{\sigma(t) = \dfrac{\varepsilon_0}{a} V_0 \left(1 - e^{t/\tau}\right)}$

Exercice 5 - Energie dans un solénoïde

1) $\vec{B} = \mu_0 n\, i(t)\, \vec{u_z}$ à l'intérieur

On a $\vec{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\mu_0 n \frac{di}{dt} \vec{u_z}$

or $\vec{E}$ ne peut dépendre, comme $\vec{B}$, que de r. On a alors

$$\vec{rot}\,\vec{E} \cdot \vec{u_z} = \frac{1}{r}\frac{\partial r E_\theta}{\partial r}$$

Donc si $r < a$: $\frac{1}{r}\frac{\partial (r E_\theta)}{\partial r} = -\mu_0 n \frac{di}{dt}$

$$\frac{\partial (r E_\theta)}{\partial r} = -\mu_0 n r \frac{di}{dt}$$

$$r E_\theta = -\mu_0 n \frac{r^2}{2}\frac{di}{dt} + cte$$ (mais cte = 0 par évaluaᵒ en 0)

Au final $\boxed{\vec{E} = -\mu_0 n \frac{r}{2}\frac{di}{dt}\vec{u_\theta} \text{ si } r < a}$

Si $r > a$, $\frac{1}{r}\frac{\partial (r E_\theta)}{\partial r} = 0$ ie $r E_\theta = cte$

or E_θ est continue (pas de distribution surfacique), donc

$$a E_\theta = -\mu_0 n \frac{a^2}{2}\frac{di}{dt} = cte$$

ie $E_\theta = -\mu_0 n \frac{a^2}{2r}\frac{di}{dt}$

donc $\boxed{\vec{E} = -\mu_0 n \frac{a^2}{2r}\frac{di}{dt}\vec{u_\theta} \text{ si } r > a}$

2) $u_{em} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2 = u_e + u_m$

$\frac{u_e}{u_m} = \frac{\mu_0\varepsilon_0 E^2}{B^2} \ll 1$ ssi $\mu_0\varepsilon_0 E^2 \ll B^2$

pire cas de figure

$$\mu_0\varepsilon_0 \cancel{\mu_0^2}\cancel{n^2}\frac{a^2}{4}\left(\frac{di}{dt}\right)^2 \ll \cancel{\mu_0^2}\cancel{n^2} i^2$$

ie $\underbrace{\mu_0 \varepsilon_0}_{\frac{1}{c^2}} \frac{a^2}{4}\left(\frac{di}{dt}\right)^2 \ll i^2$

or $\left(\frac{di}{dt}\right)^2 \simeq \frac{i^2}{T^2}$ ← temps caractéristique des variations

$$\frac{a^2}{4}\frac{\cancel{i^2}}{T^2} \ll \cancel{i^2}$$

$$\frac{a^2}{c^2 4} \ll T^2$$

τ^2 où τ est la durée mise par la lumière pour parcourir $a/2$

Il faut donc que les variations des grandeurs soient assez lentes par rapport au temps nécessaire à la lumière pour rayonner hors du solénoïde

3) $u_{em} \simeq u_m = \frac{1}{2\mu_0} B^2 = \frac{1}{2\mu_0}(n \mu_0 i)^2$

$$U_{em} = \iiint u_m \, d\tau = \underline{\pi a^2 \ell \, \frac{1}{2} n^2 \mu_0 i^2}$$

On sait que $U_{em} = \frac{1}{2} L i^2$ donc $\boxed{L = \pi a^2 \ell n^2 \mu_0.}$

4) $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \left(-\mu_0 n \frac{r}{2}\frac{di}{dt}\vec{u_\theta} \wedge \mu_0 n i \vec{u_z}\right)\frac{1}{\mu_0}$

$$= -\mu_0 n^2 \frac{r}{2}\frac{di}{dt} i \, \vec{u_r}$$

$$\mathcal{P} = \iint \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}_{entrant} = \mu_0 n^2 \frac{a}{2}\frac{di}{dt} i 2\pi a \ell = \pi \mu_0 n^2 a^2 \ell \frac{di}{dt} i$$

$$= L i \frac{di}{dt}.$$

$$\mathcal{E} = \int \mathcal{P} dt = \int_0^I L i \, di = \underline{\frac{1}{2} L I^2}. \quad :)$$

Exercice 6 - Modélisation em de la charge d'un condensateur

1) cours PTSI $u(t) = U_0 (1 - e^{-t/\tau})$ $\tau = RC$

2) On a $q = \pi a^2 \sigma = Cu = \frac{\varepsilon_0 \pi a^2}{e} u$

Donc $\sigma = \frac{\varepsilon_0}{e} u$

et $\vec{E} = \frac{\varepsilon_0}{e \varepsilon_0} u \vec{u_z} = \frac{u}{e} \vec{u_z}$

3) Entre les armatures, il n'y a pas de courant, mais il y a une variation temporelle de $\vec{E}$ qui produit donc un $\vec{B}$ par Maxwell Ampère.

$\vec{rot} \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t})$ donc $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ a les m̂ conséquences que $\vec{j}$.

On a $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{1}{e} \frac{du}{dt} \vec{u_z}$

Le plan $(\Pi, \vec{u_r}, \vec{u_z})$ est donc plan de symétrie pour $\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ et est donc plan d'antisymétrie pour $\vec{B}$

Donc $\vec{B} = B(\Pi) \vec{u_\theta}$.

4) $\vec{rot} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 \times \frac{1}{e} \frac{du}{dt} \vec{u_z}$

$/\vec{u_z}$: $\frac{1}{r} \frac{\partial (r B_\theta)}{\partial r} = \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{e} \frac{du}{dt}$

$\frac{\partial r B_\theta}{\partial r} = \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{e} r \frac{du}{dt}$

$r B_\theta = \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{e} \frac{r^2}{2} \frac{du}{dt} + cste$ (cste = 0 par évaluation en 0)

$$\boxed{B_\theta = \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{e} \frac{r}{2} \frac{du}{dt}}$$

5) $\vec{\Pi} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \left(\frac{u}{e} \vec{u_z} \wedge \frac{\mu_0 \varepsilon_0}{e} \frac{r}{2} \frac{du}{dt} \vec{u_\theta} \right) \frac{1}{\mu_0}$

$= - \frac{u \varepsilon_0}{e^2} \frac{r}{2} \frac{du}{dt} \vec{u_r}$.

$$\mathcal{P}_{entrant} = \oint\!\!\!\oint \vec{\Pi} \cdot d\vec{S}_{entrant} = \iint_{lat.} \frac{u\,\varepsilon_0}{e^2} \frac{a}{2} \frac{du}{dt}\, dS$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_0}{e^2} u \frac{du}{dt} a \times 2\pi a e$$

$$= \pi a^2 \frac{\varepsilon_0}{e} u \frac{du}{dt}$$

Cette puissance vient de la surface latérale.

6) $\mathcal{P} = \frac{\varepsilon_0 \pi a^2}{e} u \frac{du}{dt} = C u \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\underbrace{\frac{1}{2} C u^2}\right)$

oh ! l'énergie stockée dans le condensateur.

7) $\mathcal{E} = \int_0^{\infty} \mathcal{P} dt = \frac{1}{2} C U_0^2$.